## PARAGRAAF K.1 : SUBSTITUTIEMETHODE

**STAPPENPLAN VOOR DE SUBSTITUTIEMETHODE :**

**(1)** Neem $y$ = formule (bij kettingregel noem je deze formule meestal u)

**(2)** $\frac{dy}{dx} = y'$ omschrijven tot $y'dx = dy$

**(3)** Vul in de integraal de $y$ en $dy$ in en integreer deze formule.

### VOORBEELD 1

Bepaal de primitieve van

**a.** $\int 2x(x^2+3)^5\,dx =$

**b.** $\int \frac{9x^2}{\sqrt{x^3-5}}\,dx =$

**c.** $\int \cos^2(x)\sin(x)dx =$

### OPLOSSING 1

**a.** Substitutiemethode toepassen :

**(1)** $y = x^2 + 3$

**(2)** $\frac{dy}{dx} = 2x$ dus $dy = 2x\,dx$

**(3)** $\int 2x(x^2+3)^5\,dx = \int (x^2+3)^5 \cdot 2xdx = \int (y)^5\,dy = \left[\frac{1}{6}y^6\right] = \left[\frac{1}{6}(x^2+3)^6\right] =$

**b.** Substitutiemethode toepassen :

**(1)** $y = x^3 - 5$

**(2)** $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ dus $dy = 3x^2dx$ dus 3 $dy = 9x^2$

**(3)** $\int \frac{9x^2}{\sqrt{x^3-5}}\,dx = \int \frac{3}{\sqrt{y}}\,dy = [3 \cdot 2 \cdot \sqrt{y}] = [6\sqrt{y}] = [6\sqrt{x^3-5}]$

**c.** Substitutiemethode toepassen :

**(1)** $y = cos(x)$

**(2)** $\frac{dy}{dx} = -\sin(x)$ dus $dy = -sin(x)\,dx$

**(3)** $\int \cos^2(x)\sin(x)dx = \int -\cos^2(x) \cdot -\sin(x)dx = \int -y^2dy = [-\frac{1}{3}y^3] = [-\frac{1}{3}cos^3(x)]$

## PARAGRAAF K.2 : PARTIEEL INTEGREREN

**STAPPENPLAN VOOR PARTIEEL INTEGREREN :**

**(1)** Noem de ene formule f' (deze wil je integreren) en de andere g (deze wil je differentiëren)

**(2)** Vul deze in bij $\int f' \cdot g dx = [f \cdot g] - \int f \cdot g' dx$

**(3)** Probeer de laatste te integreren en als dat niet lukt herhaal dan stap 1 en 2 voor de laatste integraal.

### VOORBEELD 1

Bepaal de primitieve van

**a.** $\int x \ln(x) dx =$

**b.** $\int 3x \cdot e^x dx =$

**c.** $\int \cos(x) \cdot e^x dx =$

### OPLOSSING 1

**a.** Je wil $ln(x)$ graag differentiëren dus $g = ln(x)$ en $f' = x$. Dit geeft :

$g = \ln(x) \;\Rightarrow\; g' = \frac{1}{x}$

$f' = x \;\Rightarrow\; f = \frac{1}{2}x^2$.

Nu de regel toepassen

$$\int x \ln(x) dx = \left[\tfrac{1}{2}x^2 \cdot \ln(x)\right] - \int \tfrac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$\left[\tfrac{1}{2}x^2 \cdot \ln(x)\right] - \int \tfrac{1}{2}x dx = \left[\tfrac{1}{2}x^2 \cdot \ln(x)\right] - \left[\tfrac{1}{4}x^2\right] = \left[\tfrac{1}{2}x^2 \cdot \ln(x) - \tfrac{1}{4}x^2\right]$$

**b.** Je wil $3x$ graag differentiëren dus $g = 3x$ dus $f' = e^x$. Dit geeft

$g = 3x \Rightarrow g' = 3$

$f' = e^{2x} \Rightarrow f = \frac{1}{2}e^{2x}$.

Dus $\int 3x \cdot e^{2x} dx = \left[3x \cdot \frac{1}{2}e^{2x}\right] - \int 3 \cdot \frac{1}{2}e^{2x} dx =$

$\left[\frac{3}{2}xe^{2x}\right] - \left[\frac{3}{4}e^{2x}\right] = \left[\frac{3}{2}xe^{2x} - \frac{3}{4}e^{2x}\right]$

**c.** Partieel Integreren toepassen. Er is nu geen echte voorkeur. We kiezen daarom (willekeurig) $g = cos(x)$ dus $f' = e^x$. Dit geeft

$g = \cos(x) \Rightarrow g' = -\sin(x)$

$f' = e^x \Rightarrow f = e^x$.

Dus

**(1)** $\int \cos(x) \cdot e^x dx = \left[\cos(x) \cdot e^x\right] - \int -\sin(x)e^x dx = \left[\cos(x) \cdot e^x\right] + \int \sin(x)e^x dx$

Je bent niks opgeschoten (lijkt het). Je gaat nu nog een keer Partieel Integreren met

$g = \sin(x) \Rightarrow g' = cos(x)$

$f' = e^x \Rightarrow f = e^x$.

Dus

**(2)** $\int \sin(x) \cdot e^x dx = \left[\sin(x) \cdot e^x\right] - \int \cos(x)e^x dx$

Je hebt nu weer dezelfde integraal. Je gaat nu **(1)** en **(2)** te combineren

**(3)** $\int \cos(x) \cdot e^x dx = \left[\cos(x) \cdot e^x\right] + \int \sin(x)e^x dx =$

$$= \left[\cos(x) \cdot e^x\right] + \left[\sin(x) \cdot e^x\right] - \int \cos(x)e^x dx$$

**(4)** Stel Q = $\int \cos(x) \cdot e^x dx$. Dit geeft

$$Q = \left[\cos(x) \cdot e^x\right] + \left[\sin(x) \cdot e^x\right] - Q$$
$$2Q = \left[\cos(x) \cdot e^x + \sin(x) \cdot e^x\right]$$
$$Q = \left[\frac{1}{2}\cos(x) \cdot e^x + \frac{1}{2}\sin(x) \cdot e^x\right]$$

## PARAGRAAF K.3 : CYCLOMETRISCHE FUNCTIES

### DEFINITIES

**(1)** $arctan\,(x) = tan^{-1}(x)$ met $Domein = \mathbb{R}$ en $Bereik = <-½\pi, ½\pi>$

**(2)** $arcsin\,(x) = sin^{-1}(x)$ met $Domein = [-1,1]$ en $Bereik = [-½\pi, ½\pi\,]$

**(3)** $arccos\,(x) = tan^{-1}(x)$ met $Domein = [-1,1]$ en $Bereik = [\,0, \pi\,]$

### VOORBEELD 1

Bereken

**a.** $arcsin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) =$

**b.** $arctan(-1) =$

**c.** $arccos(2x+3) = \frac{1}{3}\pi$

### OPLOSSING 1

**a.** $sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$x = \frac{1}{6}\pi \;\; v \; x = \frac{5}{6}\pi$

**b.** $tan(x) = -1$

$x = -\frac{1}{4}\pi$

**c.** $cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) = 2x + 3$

$2x + 3 = ½$

$x = -1¼$

## DIFFERENTIËREN VAN CYCLOMETRISCHE FUNCTIES

**(1)** $f(x) = \arctan(x)$ $\quad$ *dan is* $f'(x) = \frac{1}{x^2+1}$

***(2)*** $f(x) = arcsin(x)$ $\quad$ *dan is* $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

***(3)*** $f(x) = arccos(x)$ $\quad$ *dan is* $f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

### VOORBEELD 1

Bepaal de primitieve van

**a.** $\int \frac{1}{9x^2+1}\,dx =$

**b.** $\int \frac{5}{x^2+8x+17}\,dx =$

### OPLOSSING 1

**a.** $\int \frac{1}{9x^2+1}\,dx = \int \frac{1}{(3x)^2+1}\,dx = \left[\frac{1}{3}\arctan(3x)\right]$

**b.** $\int \frac{5}{x^2+8x+17}\,dx = \int 5 \cdot \frac{1}{(x+4)^2+1}\,dx = \left[5\arctan(x+4)\right]$

## PARAGRAAF K.4 : BREUKSPLITSEN

### INTEGREREN MET DISCRIMINANT IN DE BREUK

De functie $f(x) = \frac{px+q}{ax^2+bx+c}$ kun je op een aantal manieren integreren. Dit hangt af van de waarde van $D = b^2 - 4ac$. Er geldt :

**(1)** Als D < 0 → Iets met $arctan(x)$

**(2)** Als D = 0 → Substitutiemethode (Iets met $\ln(ax^2 + bx + c)$ )

**(3)** Als D > 0 → Breuksplitsen : $\frac{px+q}{ax^2+bx+c} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}$

### VOORBEELD 1 : BREUKSPLITSEN

Bepaal de primitieve van $\int \frac{3x+5}{x^2+x-2} dx$

### OPLOSSING 1

**1.** Omdat D > 0 en omdat $x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$ kun je deze integraal schrijven als :

$$\frac{3x+5}{x^2+x-2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1}$$

**2.** Nu gaan we de laatste vorm als één breuk schrijven. Dit geeft

$$\frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)}{(x+2)(x-1)} + \frac{B(x+2)}{(x-1)(x+2)} = \frac{Ax + Bx - A + 2B}{x^2 + x - 2}$$

**3.** Deze laatste vorm moet gelijk zijn aan $\frac{3x+5}{x^2+x-2}$. Dit betekent dat

$A + B = 3 \;\; en \;\; -A + 2B = 5$

Optellen geeft $3B = 8 \; dus \; B = \frac{8}{3}$

Dus $A = 3 - \frac{8}{3} = \frac{1}{3}$

**4.** Nu de integraal berekenen : $\int \frac{3x+5}{x^2+x-2} dx = \int \frac{\frac{1}{3}}{x+2} + \frac{\frac{8}{3}}{x-1} dx = \frac{1}{3}\ln(x+2) + \frac{8}{3}\ln(x-1)$

## VOORBEELD 2 : DOOR ELKAAR

Bepaal de primitieve van

**a.** $\int \frac{x+1}{x^2-4x+4} dx$

**b.** $\int \frac{8}{x^2-2x-15} dx$

## OPLOSSING 2

**a.** Omdat D = 0 moeten we de substitutiemethode gebruiken :

**(1)** $y = x^2 - 4x + 4$

**(2)** $dy = (2x-4)dx$ dus $\frac{1}{2}dy = (x-2)dx$

**(3)** De ln-vorm eruit halen geeft :

$$\int \frac{x+1}{x^2-4x+4} dx = \int \frac{x-2+3}{x^2-4x+4} dx = \int \frac{x-2}{x^2-4x+4} dx + \int \frac{3}{x^2-4x+4} dx =$$

$$\int \frac{1}{y} dy + \int \frac{3}{(x-2)^2} dx = [\ln(y) + 3(x-2)^{-1})] = \left[\ln(x^2-4x+4) + \frac{3}{x-2}\right]$$

**b.** Omdat D > 0 en omdat $x^2 - 2x - 15 = (x+3)(x-5)$ kun je deze schrijven als :

**1.** $\frac{8}{x^2-2x-15} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-5}$

**2.** Nu gaan we de laatste vorm als één breuk schrijven. Dit geeft
$\frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-5} = \frac{A(x-5)}{(x+3)(x-5)} + \frac{B(x+3)}{(x-5)(x+3)} = \frac{Ax+Bx-5A+3B}{x^2-2x-15}$

**3.** Deze laatste vorm moet gelijk zijn aan $\frac{8}{x^2-2x-15}$.
Dit betekent dat
A + B = 0 en -5A + 3B = 8
Omdat A = -B krijg je -5B – 3B = 8 geeft B = -1. Dus A = 1

**4.** Nu kunnen we de integraal bepalen :

$$\int \frac{8}{x^2-2x-15} dx = \int \frac{1}{x+3} + \frac{-1}{x-5} dx = [\ln(x+3) - \ln(x-5)]$$